一类$\mathbb{A}\otimes\widetilde{\mathbb{A}}$型代数上的不可分解模的同构类[1]

周建国[i]，刘雨喆[i,*]，赵伟[ii]

i. 贵州大学数学与统计学院，贵州贵阳，550025，
E-mail: 18984938895@163.com (X Lin)， yzliu3@163.com (Y-Z Liu);
ii. 阿坝师范学院数学学院，四川汶川，623002，
zw9c248@163.com (W Zhao);
*通讯作者.

摘要. 令A_n是 2 次Jacobson根为零的$\mathbb{A}$型Nakayama代数，$\widetilde{A}_n$是 2 次Jacobson根为零的$\widetilde{\mathbb{A}}$型Nakayama代数. 本文考虑了A_n与$\widetilde{A}_n$的k-张量$A_n\otimes_k\widetilde{A}_n$上的不可分解模的分类问题，并给出其在同构意义下的计数公式.

关键词. 箭图表示, Dynkin图, Euclid图，张量, Nakayama代数.
中图分类号. O153.3; O151.26; O151.23.
2010 Mathematics Subject Classification. 16G10; 16G20; 16G60.

文章状态：未投稿.

The isoclasses of indecomposable modules over an algebra of type $\mathbb{A}\otimes\widetilde{\mathbb{A}}$

Jianguo Zhou[i], Yu-Zhe Liu[i,*], Wei Zhao[ii]

i. Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang, Guizhou, 550025, China;
ii. School of Mathematical Sciences, Capital Normal University, Beijing, 100089, China;
iii. School of Mathematics, Aba Teachers University, Wenchuan, Sichuan, 623002, China;
* Corresponding Author: E-mail: 2210502106@cnu.edu.cn (Ch-Y Li).

Abstract. Let A_n be the Nakayama algebra of type $\mathbb{A}$ with quadratic Jacobson radical to be zero and $\widetilde{A}_n$ be the Nakayama algebra of type $\widetilde{\mathbb{A}}$ with quadratic Jacobson radical to be zero. In this paper, we consider the k-tensor $A_n\otimes_k\widetilde{A}_n$ of A_n and $\widetilde{A}_n$ and the classification of the indecomposable modules over $A_n\otimes_k\widetilde{A}_n$. Moreover, we provide a counting formula to compute the number of isoclasses of indecomposable $A_n\otimes_k\widetilde{A}_n$-modules.

Keywords: quiver representations; Dynkin quiver; Euclid quiver; tensors; Nakayma algebras.
2010 Mathematics Subject Classification. 16G10; 16G20; 16G60.

引 言

本文总是假设k是代数闭域，且所讨论的k-代数均是有限维的连通代数. 给定三个代数A，B和C以及(A,C)-双模$M={}_AM_C$和(C,B)-双模$N={}_CN_B$，作为右C-模的M和作为C-模的N的张量定义为是一个k-向量空间$M\otimes_C N$与C-双线性映射$h:M\times N\to M\otimes_C N$构成的二元组$(M\otimes_C N,h)$（仍然简记为$(M\otimes_C N,h)$），使得对任意$k$-向量空间$G$和任意$C$-双线性映射$h:M\times N\to C$，唯一存在$k$-线性映射$g:M\otimes_C N\to G$使得$gh=f$（例如参考[1]的第二章). 张量在数学、物理甚至其它领域有着广泛应用，因此其在代数领域中占据了举足轻重的地位，代数的同调性质[2][3], Hochschild 同调性质[4][5][6]，表示论性质[7]等.

代数的表示型问题是代数表示论中的核心问题之一，其研究包括对代数的不可分解表示的分类与计

1. 国家自然科学基金项目（12061001; 12171207);
四川省科技厅 2023 年中央引导地方科技发展项目（申请号 23ZYZYTS0335);
贵州大学引进人才科研启动基金项目（贵大人基合字(2022)53 号, (2022)65 号）资助.

数, Clebsh-Gordan 问题[8][9][10][11][12], 给定代数的表示型的判定[13][14], Brauer-Thrall 猜想 (该猜想第一猜想[15][16][17][18][19][20][21][22]和第二猜想[22][23][24][25][26], 参见[27]的 IV.5)等. 无限表示型又分为驯表示型和野表示型. 鲍炎红就对遗传 $\mathbb{A}$ 型代数作为 k-模时的张量 (以下简称 k-张量) 的表示型进行了判断, 并给出所研究的张量代数是驯/野表示型的充分条件[13]. 那之后, 文献[14]的作者进一步考虑了任意 $\mathbb{A}$ 型代数的多重 k-张量, 给出了其中一类多重张量代数表示有限的充分必要条件, 并从其推论 4.1 可看出两个代数的张量只有是较为特殊的情形下才有可能是表示有限的, 例如包络代数 $A_n^e := A_n^{\mathrm{op}} \otimes_k A_n$ (A_n 是二次 Jacobson 根为零且整体维数有限的Nakayama代数, 这是一种 $\mathbb{A}\otimes\mathbb{A}$ 型代数) 是表示有限代数, 其不可分解模的同构类数为 $\frac{4}{3}n^3+n^2-\frac{7}{3}n+1$ [28]. 由于大部分的张量代数表示无限, 因此, 张量代数上的不可分解模在同构意义下分类较为困难.

本文将聚焦一类 $\mathbb{A}\otimes\widetilde{\mathbb{A}}$ 型张量代数 $A_n\otimes\widetilde{A}_n$ (记号说明见**例 1**), 对此代数上的不可分解模在同构意义下进行分类, 并给出其不可分解模的同构类数的计数公式, 并为之后对 $\mathbb{A}$ 和 $\widetilde{\mathbb{A}}$ 型代数的多重张量代数的表示型研究做好预备工作. 本文结构安排如下: 本文的第 1 节介绍本文需要的一些预备知识, 包括代数的 k-张量与特殊双列代数上的不可分解模的刻画, 即 Wald-Waschbusch 对应定理. 在第 2 节, 本文引入交错 V-序列的概念, 并利用交错 V-序列和 Wald-Waschbusch 对应定理对 $A_n\otimes\widetilde{A}_n$ 上的不可分解模进行描述. 第 3 节是本文的主要结论, 包括不可分解 $A_n\otimes\widetilde{A}_n$-模在同构意义下的分类以及计数公式.

1 预备知识

文章的这一部分我们将介绍一些预备知识, 包括对代数的张量及其箭图表示的复习, 以及 Wald 和 Waschbusch 在文献[29]中对特殊双列代数的部分工作. 且为了方便起见, 本文对所使用的记号作出如下约定. 对给定代数 A, 用 Q_A (在不引起混淆时, 则用 Q) 表示其箭图, 这里箭图 Q 指的是四元组由顶点集 Q_0, 箭向集 Q_1, 以及两个函数 $s,t:Q_1\to Q_0$ 构成的四元组 $Q=(Q_0,Q_1,s,t)$, 其中: s,t 分别将 Q_1 中的箭向映射到此箭向的起点和终点. 本文所讨论的 A-模在不特殊说明的情况下, 默认为右 A-模, 且对 Q 上的任意两个箭向 a, b, 当 $t(a)=s(b)$ 时其乘法定义为箭向的复合 ab; 否则其乘法定义为 0. ab 也被称作长度 2 的路径(path). 自然地, 我们可以定义任意长度的路径以及路径的复合. 由上, Q_0 和 Q_1 可以自然地被看作长度 0 的路径的集合以及长度 1 的路径的集合. 全体长度 l 的路径构成的集合记作 Q_l. 特别地, 本文所讨论的代数 $A=kQ_A/I_A$ 的箭图 Q_A 都是连通的, I_A 总是由 Q_A 上的路径的 k-线性组合生成的 k-向量空间, 且总是加上 I_A 是可许理想. 二元组 (Q_A,I_A) 称为 A 的有界箭图 (bound quiver). 上述记号约定均是沿用于[27].

1.1 代数的张量.

设 A 和 B 是 k-代数, 其作为域 k 上的向量空间的张量 $A\otimes_k B$ 也是一个 k-代数, 其维数满足 $\dim_k(A\otimes_k B)=\dim_k A\cdot\dim_k B$. 显然, 当 A 和 B 都是有限维 k-代数时, 则 $A\otimes_k B$ 也是. 特别地, 如果 A 和 B 都是基代数 (basic algebra), 即对 A (分别地, B) 的完全本原正交幂等元组 $E(A)$ = $\{e_{A,i}\mid 1\le i\le m\}$ (分别地, $E(B)=\{e_{B,j}\mid 1\le j\le m\}$), 有 $e_{A,i}A\ncong e_{A,j}A$ (分别地, $e_{B,i}B\ncong e_{B,j}B$) 对任意 $i\ne j$ 恒成立, 则 $A\otimes_k B$ 也是基代数. 对任意的基代数 Λ, 它总是可以同构于某个箭图 Q_Λ 的路代数 kQ_Λ 的商 kQ_Λ/I_Λ. 特别当 I_Λ 是可许理想 (admissible ideal) 时, Q_Λ 被唯一决定. 于是, 可假设 $A\otimes_k B\cong kQ_{A\otimes_k B}/I_{A\otimes_k B}$, 其完全本原正交幂等元组由 Cartesian 积 $E(A)\times E(B)$ 完全刻画, 其元素写为 $e_{A,i}\otimes e_{B,j}$. 于是, $A\otimes_k B$ 的箭图 $Q_{A\otimes_k B}$ 由 $E(A)\times E(B)$ 和下式完全决定:

$$(e_{A,i}\otimes e_{B,j})\left(\mathrm{rad}(A\otimes_k B)/\mathrm{rad}^2(A\otimes_k B)\right)(e_{A,\imath}\otimes e_{B,\jmath})$$
$$\cong_k \left(\mathrm{rad}(e_{A,i}Ae_{A,\imath})/\mathrm{rad}^2(e_{A,i}Ae_{A,\imath})\right)\otimes_k\left(\mathrm{rad}(e_{B,j}Be_{B,\jmath})/\mathrm{rad}^2(e_{B,j}Be_{B,\jmath})\right),$$

其中, 记号“$\cong_k$”表示 k-向量空间的同构, 其 k-线性维数描述了 (i,j) 到 $(\imath,\jmath)$ 的箭向数. 理想 $I_{A\otimes_k B}$ 则由 I_A, I_B, 以及张量的运算性质自然诱导.

另一方面, 还可以按下述方式定义有界箭图的张量.

定义 1. 对两个有界箭图 (Q',I') 和 (Q'',I''), 其图张量 $(Q',I')\otimes(Q'',I'')$ 定义为 $(Q'\otimes Q'',T(I',I''))$, 其中 $Q'\otimes Q''$ 是按下述方式给出的四元组 $((Q'\otimes Q'')_0,(Q'\otimes Q'')_1,s,t)$, 称为箭图张量 (或有向图张量):

(1) $(Q'\otimes Q'')_0 = Q'_0\times Q''_0$ 是 Cartesian 乘积;

(2) $(Q'\otimes Q'')_1 = (Q'_1\times Q''_0)\cup(Q'_0\times Q''_1)$, 其中, $Q'_1\times Q''_0$ 中的元素记作 $\alpha\otimes e''_j$, $Q'_0\times Q''_1$ 中的元素记作 $e'_i\otimes\beta$, 这里 Q'_0 和 Q''_0 分别看作 Q' 和 Q'' 上长度 0 的路径构成的集合;

(3) 对任意的 $\alpha\otimes e''_j\in Q'_1\times Q''_0\subseteq(Q'\otimes Q'')_1$, 定义 $s(\alpha\otimes e''_j)=(s(\alpha),j)$, $t(\alpha\otimes e''_j)=(t(\alpha),j)$; 同时对任意的 $e'_i\otimes\beta\in Q'_0\times Q''_1\subseteq(Q'\otimes Q'')_1$,定义 $s(e'_i\otimes\beta)=(i,s(\beta))$, $t(e'_i\otimes\beta)=(i,t(\beta))$.

$T(I',I'')$ 是有下述三类 k -线性组合生成的 k -向量空间:

(a) $r'\otimes e''_j$, 其中, r' 是 I' 的生成元;

(b) $e'_i\otimes r''$, 其中, r'' 是 I'' 的生成元;

(c) $(e_u\otimes\beta)(\alpha\otimes e_s)-(\alpha\otimes e_r)(e_v\otimes\beta)$, 其中 $\alpha:u\to v$, $\beta:r\to s$ 是箭向, 如下图所示.

$$\begin{array}{ccc} (u,r) & \xrightarrow{e_u\otimes\beta} & (u,s) \\ {\scriptstyle\alpha\otimes e_r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha\otimes e_s} \\ (v,r) & \xrightarrow[e_v\otimes\beta]{} & (r,s) \end{array}$$

Herschend 指出, 两个有限维基代数 A 和 B 的 k -张量 $A\otimes_k B$ 的有界箭图 $(Q_{A\otimes_k B}, I_{A\otimes_k B})$ 与这两个有限维基代数的有界箭图 (Q_A,I_A) 和 (Q_B,I_B) 的图张量 $(Q'\otimes Q'', T(I',I''))$ 一致, 即下述定理.

定理 1. (Herschend [7],Proposition 3) 设 $A\cong kQ_A/I_A$ 和 $B\cong kQ_B/I_B$ 是有限维代数, 则

$$A\otimes_k B\cong k(Q'\otimes Q'')/T(I',I'').$$

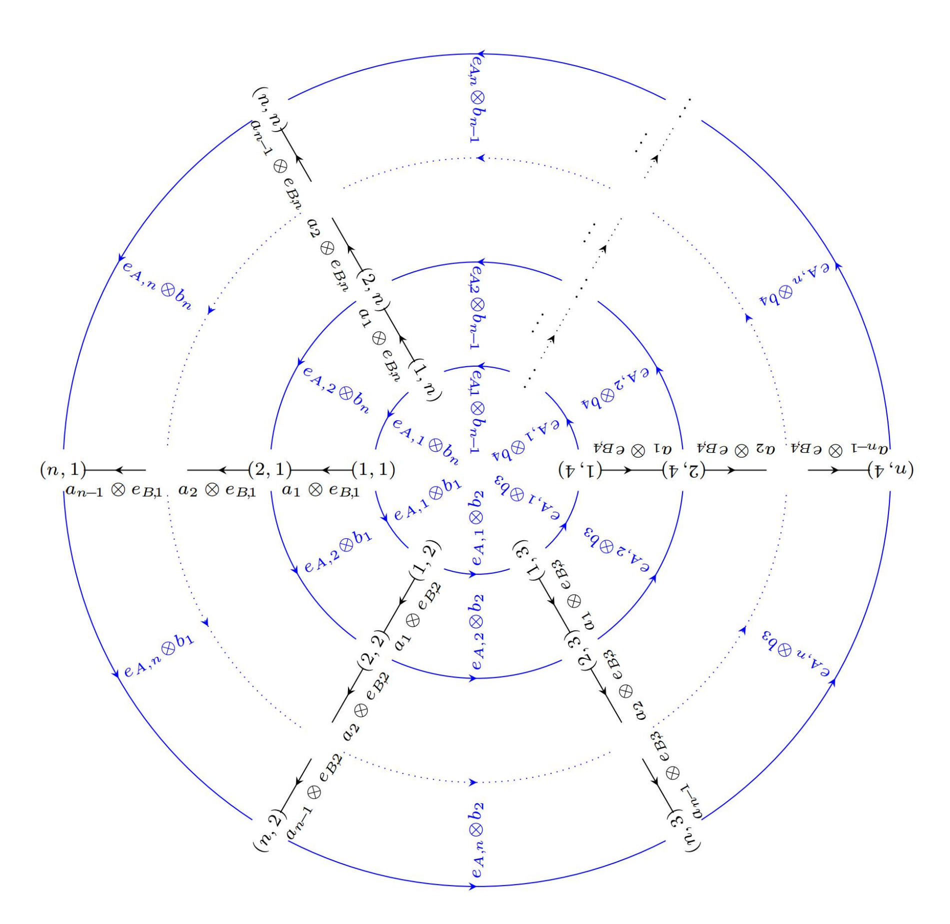


图 1. $A_n\otimes_k\widetilde{A}_n$ 的箭图

例 1. 用 $\mathbb{A}_n$ 和 $\widetilde{\mathbb{A}}_{n-1}$ 分别表示线性定向的 Dynkin 型箭图

$$1\xrightarrow{a_1}2\xrightarrow{a_2}\cdots\xrightarrow{a_{n-1}}n,$$

和 Euclid 型箭图

$$1 \xrightarrow{b_1} 2 \xrightarrow{b_2} \cdots \xrightarrow{b_{n-1}} n, \qquad b_n: n \to 1$$

并令 $A = A_n = k\mathbb{A}_n / \mathrm{rad}^2(k\mathbb{A}_n)$，$B = \widetilde{A}_n = k\widetilde{\mathbb{A}}_{n-1} / \mathrm{rad}^2(k\widetilde{\mathbb{A}}_{n-1})$，则 $A_n \otimes_k \widetilde{A}_n$ 是一类 $\mathbb{A}\otimes\widetilde{\mathbb{A}}$ 型有限维 k-代数，其箭图为如图 **1** 所示.

1.2 特殊双列代数.

特殊双列代数是一类重要的代数，它与 gentle 代数[30]有着密切的联系. Wald 和 Waschbusch 对特殊双列代数的模范畴展开了研究，并完全刻画了特殊双列代数上的不可分解模和不可约态射[29]. 为便于读者阅读，本节将分为三个部分：特殊双列代数及其定义；V-序列的定义及其对特殊双列代数上的不可分解模的描述；以及 Wald 和 Waschbusch 的对应定理.

1.2.1 特殊双列代数. 满足下述条件的有界箭图 (Q, I) 被称为一个*特殊双列有序对*.

(1) I 是可许理想(admissible ideal);

(2) 对任意给定的 $v \in Q_0$，存在至多两个箭向 α，$\beta \in Q_1$，使得 $v = t(\alpha) = t(\beta)$；

(3) 对任意给定的 $v \in Q_0$，存在至多两个箭向 α，$\beta \in Q_1$，使得 $v = s(\alpha) = s(\beta)$；

(4) 对箭向 $\alpha \in Q_1$，如果存在 β_1，$\beta_2 \in Q_1$ 使得 $t(\alpha) = s(\beta_1) = s(\beta_2)$，则 $\alpha\beta_1$，$\alpha\beta_2$ 至少一者属于 I；

(5) 对箭向 $\beta \in Q_1$，如果存在 α_1，$\alpha_2 \in Q_1$ 使得 $t(\alpha_1) = t(\alpha_2) = s(\beta)$，则 $\alpha_1\beta, \alpha_2\beta$ 至少一者属于 I.

定义 2. 当有限维代数 $A = kQ/I$ 的有界箭图 (Q, I) 是特殊双列对时，则称 A 是*特殊双列代数*.

例 2. $A_n \otimes_k \widetilde{A}_n$ 是特殊双列代数.

1.2.2 V-序列. 设 $A = kQ/I$ 是特殊双列代数. 对有界箭图 $(Q, I) = (Q_0, Q_1, s, t, I)$，定义 (Q, I) 的*形式逆有界箭图*是 $(Q^{-1}, I^{-1}) = (Q_0^{-1}, Q_1^{-1}, s, t, I^{-1})$，其中，$Q_0^{-1} = Q_0$，$Q_1^{-1} = \{\alpha^{-1} \mid \alpha \in Q_1\}$，$s(\alpha^{-1}) = t(\alpha)$，$t(\alpha^{-1}) = s(\alpha)$，且对 Q^{-1} 上的路径 $\wp^{-1}$，$\wp^{-1} \in I^{-1}$ 当且仅当 $\wp \in I$ (这里，对 $\wp = \alpha_1 \cdots \alpha_n$，定义 $\wp^{-1} = \alpha_n^{-1} \cdots \alpha_1^{-1}$). 换言之，对 Q 上的每一个箭向 $\alpha: i \to j$，(Q^{-1}, I^{-1}) 为它赋予了一个*形式逆* $\alpha^{-1}: j \to i$. 自然地，对任意 $\omega \in Q_1 \bigcup Q_1^{-1}$ 可以进一步定义 $(\omega^{-1})^{-1} = \omega$，且对任意长度 0 的路 $e \in Q_0$，定义 $e^{-1} = e$.

定义 3[[29], Definitions 2.1, 2.2]. 设 (Q, I) 是特殊双列有序对.

(1) 有界箭图 (Q, I) 上的长度 n 的 *V-序列* (V-sequence) 是定义在 $(Q, I) \bigcup (Q^{-1}, I^{-1})$ 上的序列 $\omega = \omega_1\omega_2 \cdots \omega_n$，使得:

- ω 不存在形如 $\alpha\alpha^{-1}$ 的子序列;
- 对 ω 的任意形如 $\alpha_1 \cdots \alpha_t$ 的子序列 ($\alpha_1, \cdots, \alpha_t \in Q_1$)，有 $\alpha_1 \cdots \alpha_t \notin I$；
- 对 ω 的任意形如 $\alpha_1 \cdots \alpha_t$ 的子序列 ($\alpha_1, \cdots, \alpha_t \in Q_1^{-1}$)，有 $\alpha_1 \cdots \alpha_t \notin I^{-1}$.

如果两个 V-序列 $\omega = \omega_1\omega_2 \cdots \omega_n$ 和 $\omega' = \omega_1'\omega_2' \cdots \omega_n'$ 满足 $\omega = \omega'^{\pm 1}$，则称它们是*等价的*，记作 $\omega \simeq \omega'$. 特别地，规定 0 是*平凡* V-序列. 习惯上，用 $[\omega]$ 表示与 ω 等价的全体 V-序列构成的等价类，用 $\mathrm{V}(A)$ 表示全体 V-序列的等价类构成的集合. 此外，对 ω 上的任何一条路径 $\wp$ 和 I 的任何一个生成元 $r = \Sigma_{i=1}^{t} k_i \wp_i$，始终有 $\wp \neq \wp_i \, (1 \le i \le t)$ (即 $\wp$ 不为 r 的任何*去系数分量* $\wp_i$)，则称 ω 是一个*无关系依附的 V-序列* (V-sequence without relation). 全体无关系依附的 V-序列的等价类构成的集合记作 $\overline{\mathrm{V}(A)}$.

(2) 有界箭图 (Q, I) 上的长度 n 的*本原 V-序列* (primitive V-sequence) 是定义在 $(Q, I) \bigcup (Q^{-1}, I^{-1})$ 上的 V-序列 $\beta = \beta_1\beta_2 \cdots \beta_n$，使得:

- $s(\beta) = t(\beta)$；
- 对任意 $t \ge 1$，β^t 是 V-序列;
- 对任意 V-序列 β'，$\beta \neq \beta'^t$ ($t \ge 2$).

两个本原 V-序列 $\omega = \omega_1\omega_2 \cdots \omega_n$ 和 $\omega' = \omega_1'\omega_2' \cdots \omega_n'$ 如果满足 $\omega[t] = \omega'^{\pm 1}$ (其中，$\omega[t]$ 表示 $\omega_{\overline{1+t}}\omega_{\overline{2+t}} \cdots \omega_{\overline{n+t}}$，这里对整数 x，记号 $\overline{x}$ 表示 x 对 n 取余数后再加上 1，即 $\overline{x} = x \bmod n + 1 \in \mathbb{Z}/n$)，则称它们是*等价的*，记作 $\omega \simeq \omega'$，仍用 $[\omega]$ 表示与 ω 等价的全体本原 V-序列构成的等价类，用 $\mathrm{pV}(A)$ 表示全体本原 V-序列的等价

类构成的集合.

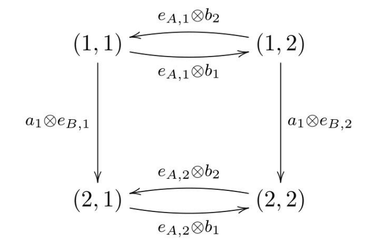
1.2.3 Wald-Waschbusch 对应定理. 下面定理由 Wald-Waschbusch 给出, 它指出 V-序列和本原 V-序列可以用来刻画特殊双列代数上的不可分解模.

定理 2. (Wald-Waschbusch 对应定理) 设 A 是特殊双列代数, $\mathrm{ind}(\mathrm{mod}\, A)$ 是其全体不可分解对象的同构类构成的集合. 则存在满射

$$M_A : \mathrm{V}(A) \cup (\mathrm{pV}(A) \times \mathcal{J}) \longrightarrow \mathrm{ind}(\mathrm{mod}\, A),$$

使得 $\mathrm{Im}(M_A|_{\mathrm{V}(A)}) \cap \mathrm{Im}(M_A|_{\mathrm{pV}(A\times\mathcal{J})}) = \varnothing$, 其中 $\mathcal{J}$ 表示全体特征值非零的 Jordan 块构成的集合. 特别地, 如果 A 上的投射-内射模都是单列模, 则 M_A 是双射.

例 3. 考虑 $A = A_2 \otimes_k \widetilde{A}_2$, 其有界箭图为 (Q_A, I_A), 其中 $Q_A =$



I_A 由 $\mathrm{rad}^2 k\mathbb{A}_2$, $\mathrm{rad}^2 k\widetilde{\mathbb{A}}_1$ 以及张量的运算性质自然诱导. 则 A 上全体 V-序列 (在等价意义下) 可分类如下:

(1) 长度 0 的 V-序列: 共 4 个, 由箭图的四个顶点给出;

(2) 长度 1 的 V-序列: 共 6 个, 由箭图的箭向集给出;

(3) 长度 2 的无关系依附 V-序列: $(a_1 \otimes e_{B,1})(e_{A,2} \otimes b_2)^{-1}$, $(a_1 \otimes e_{B,2})(e_{A,2} \otimes b_1)^{-1}$, $(a_1 \otimes e_{B,1})^{-1}(e_{A,1} \otimes b_1)$, $(a_1 \otimes e_{B,2})^{-1}(e_{A,1} \otimes b_2)$, 共 4 个;

(4) 长度 3 的无关系依附 V-序列: 共 2 个:

– $(e_{A,1} \otimes b_1)^{-1}\,(a_1 \otimes e_{B,1})\,(e_{A,2} \otimes b_2)^{-1}$

– $(e_{A,1} \otimes b_2)^{-1}\,(a_1 \otimes e_{B,2})\,(e_{A,2} \otimes b_1)^{-1}$

(5) 长度 4 的本原 V-序列:

– $\beta_1 = (a_1 \otimes e_{B,1})(e_{A,2} \otimes b_1)(a_1 \otimes e_{B,2})^{-1}(e_{A,1} \otimes b_1)^{-1}$;

– $\beta_2 = (e_{A,1} \otimes b_1)(a_1 \otimes e_{B,1})(e_{A,2} \otimes b_2)^{-1}(a_1 \otimes e_{B,2})^{-1}$;

(6) 其它 V-序列, 它们都不是无关系依附的 V-序列.

对任何属于 $(1)\cup(2)\cup(3)\cup(4) = \overline{\mathrm{V}(A)}$ 的 V-序列 ω, $M_A([\omega])$ 是不可分解 A-模, 且 $M_A|_{\overline{\mathrm{V}(A)}}$ 是单射. 而对于 β_i $(i = 1,2)$, 则是:

$$M_A([\beta_i], \boldsymbol{J}_n(\lambda)) = \begin{cases} P(s(\beta_i)), & \text{如果} n = 1 \text{且} \lambda = 1; \\ 0, & \text{其它情形}, \end{cases}$$

其中, $\boldsymbol{J}_n(\lambda) \in \mathcal{J}$ 表示特征值为 λ 的 n 阶 Jordan 块, $P(s(\beta_i))$ 是对应于点 $s(\beta_i) \in (Q_A)_0$ 的不可分解投射模 (且易见它是不可分解的投射-内射模). 对于任何属于 $(6) = \mathrm{V}(A) \setminus \overline{\mathrm{V}(A)}$ 的 V-序列 ω, 此时是 $M_A([\omega]) = 0$. 可见, 映射 M_A 给出了 $A = A_2 \otimes_k \widetilde{A}_2$ 的全体不可分解模, 共 18 个.

2 交错 V-序列

从文章的此处开始, 始终记 $A_n \otimes_k \widetilde{A}_n$ 为 Λ_n, 并用 $(Q_{\Lambda_n}, I_{\Lambda_n})$ 表示其有界箭图. 本章将引入交错 V-序列的概念, 并用它给出不可分解-Λ_n 模在同构意义下的分类.

2.1 交错 V-序列.

定义 4. 有界箭图 $(Q_{\Lambda_n}, I_{\Lambda_n})$ 上的交错 V-序列 (alternate V-sequence) $\omega = \omega_1\omega_2\cdots\omega_l$ ($\omega_1, \cdots, \omega_l \in Q_1 \cup Q_1^{-1}$) 是同时满足下述条件的 V-序列:

(1) 对任意 $1 \le i < l$, 如果 $\omega_i \in (Q_{\Lambda_n})_1$, 则 $\omega_{i+1} \in (Q_{\Lambda_n})_i^{-1}$;

(2) 对任意 $1 \le i < l$, 如果 $\omega_i \in (Q_{\Lambda_n})_1^{-1}$, 则 $\omega_{i+1} \in (Q_{\Lambda_n})_1$.

显然, 交错 V-序列一定是无关系依附的 V-序列. 由于所有 V-序列可以分为交错 V-序列和非交错 V-序列两类, 因此通过下面引理可知 $(Q_{\Lambda_n}, I_{\Lambda_n})$ 上的无关系依附的 V-序列都是交错 V-序列 (即**推论 1**).

引理 1. 任取 $\omega\in \mathrm{V}(\Lambda_n)$ 使得 ω 上存在一条长度 2 的子路 $\omega_t\omega_{t+1}$ (即 $\omega_t,\omega_{t+1}\in Q_1$, 或 $\omega_t,\omega_{t+1}\in Q_1^{-1}$. 这里不失一般性地假设前者成立), 则 $\omega_t\omega_{t+1}$ 必为 I_{Λ_n} 的某个生成元的去系数分量.

证. 根据**例 3**, 易见 ω_t 或者形如 $a_i\otimes e_{B,j}$, 或者形如 $e_{A,i}\otimes b_j$. 若 $\omega_t = a_i\otimes e_{B,j}$, 则由 $t(\omega_t)=s(\omega_{t+1})$, 可知 ω_{t+1} 或者等于 $a_{i+1}\otimes e_{B,j}$, 或者等于 $e_{A,i+1}\otimes b_j$. 若 $\omega_{t+1}=a_{i+1}\otimes e_{B,j}$, 则

$$\omega_t\omega_{t+1}=(a_i\otimes e_{B,j})(a_{i+1}\otimes e_{B,j})=a_ia_{i+1}\otimes e_{B,j}\in I_{\Lambda_n},$$

与 V-序列的定义矛盾. 所以 $\omega_{t+1}=e_{A,i+1}\otimes b_j$. 而对于后者,

$$r:=(a_i\otimes e_{B,j})\,(e_{A,i+1}\otimes b_j)-(e_{A,i}\otimes b_j)\,(a_i\otimes e_{B,j+1})\in I_{\Lambda_n},$$

且 r 是 I_{Λ_n} 的生成元. $\omega_t\omega_{t+1}=(a_i\otimes e_{B,j})(e_{A,i+1}\otimes b_j)$ 是 r 的去系数分量. 对 $\omega_t=e_{A,i}\otimes b_j$ 的情形, 证明类似. □

推论 1. $(Q_{\Lambda_n}, I_{\Lambda_n})$ 上的 V-序列是无关系依附 V-序列当且仅当其是交错 V-序列.

证. 由交错 V-序列的定义, 可知每个交错 V-序列是无关系依附 V-序列. 反之, 设 ω 是无关系依附 V-序列, 但不是交错的, 则 ω 上必然存在长度 2 的路径 $\omega_t\omega_{t+1}$ ($\omega_t,\omega_{t+1}\in(Q_{\Lambda_n})_1$, 或 $\omega_t,\omega_{t+1}\in(Q_{\Lambda_n})_1^{-1}$). 根据**引理 1**, 可知存在 I_{Λ_n} 上某个交换关系 r, 使得 $\omega_t\omega_{t+1}$ 是 r 的某个去系数分量, 这与无关系依附 V-序列的定义矛盾. 所以 ω 是交错 V-序列. □

2.2 $M_{\Lambda_n\otimes_k\widetilde{\Lambda}_n}$ 的像.

引理 2. (1) 对任意 $\omega\in \mathrm{V}(\Lambda_n)\setminus\overline{\mathrm{V}(\Lambda_n)}$, 有 $M_{\Lambda_n}([\omega])=0$.

(2) 对任意 $\omega\in\overline{\mathrm{V}(\Lambda_n)}$, 当 $\omega\neq 0$ 时, 有 $M_{\Lambda_n}([\omega])\neq 0$.

(3) 对任意 $\omega\in \mathrm{pV}(\Lambda_n)$, $M_{\Lambda_n}([\omega],\boldsymbol{J}_n(\lambda\neq 0))\neq 0$ 当且仅当 $n=1$ 且 $\lambda=1$.

(4) $M_{\Lambda_n}|_{\overline{\mathrm{V}(\Lambda_n)}}$ 是单射.

证. 首先, 注意到对任意不可分解投射 $kQ_{\Lambda_n}/J_{\Lambda_n}$-模 P, $\mathrm{rad}P$ 或者是单列模, 或者是两个不可分解单列模的直和, 其中, J_{Λ_n} 的生成元由 I_{Λ_n} 中的零关系 (即全部长度 2 的路径) 给出, 即:

$$J_{\Lambda_n}=\langle (a_u\otimes e_v)(a_{u+1}\otimes e_v),(e_{A,i}\otimes b_j)(e_{A,i}\otimes b_{j+1})\mid 1\le u<n, 1\le i\le n; v,j\in\mathbb{Z}/n\rangle.$$

当 $\mathrm{rad}P$ 是两个不可分解单列模的直和时, P 不是投射-内射模. 当 P 是投射-内射模时, $\mathrm{rad}P$ 是单列模. 又因为有限维 k-代数上的不可分解模的顶部 $\mathrm{top}P=P/\mathrm{rad}P$ 是单模, 因此当 $\mathrm{rad}P$ 是单列模时, P 一定也是单列的, 此时得到 P 也是单列的. 所以不可分解的投射-内射 $kQ_{\Lambda_n}/J_{\Lambda_n}$-模是单列模. 然后根据**定理 2**, 得到 $M_{kQ_{\Lambda_n}/J_{\Lambda_n}}$ 是双射.

其次, 令 I_{Λ_n} 的全体交换关系 (即形如 $(a_i\otimes e_{B,j})\,(e_{A,i+1}\otimes b_j)-(e_{A,i}\otimes b_j)\,(a_i\otimes e_{B,j+1})=:r_{i,j}$ 的生成元) 构成的集合为 $C=\{r_{i,j}\mid 1\le i<n, 1\le j\le n\}$, 并自然地记 $C+J_{\Lambda_n}=\{r_{i,j}+\Lambda_n\mid 1\le i<n, 1\le j\le n\}$. 于是得到下述满同态

$$\pi: kQ_{\Lambda_n}/J_{\Lambda_n}\longrightarrow (kQ_{\Lambda_n}/I_{\Lambda_n})/(C+\Lambda_n)\cong kQ_{\Lambda_n}/I_{\Lambda_n}=\Lambda_n.$$

它诱导了如下交换图:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{V}(kQ_{\Lambda_n}/J_{\Lambda_n})\cup(\mathrm{pV}(kQ_{\Lambda_n}/J_{\Lambda_n}),\mathcal{J}) & \xrightarrow{G_\pi} & \mathrm{V}(\Lambda_n)\cup(\mathrm{pV}(\Lambda_n)) \\
M_{kQ_{\Lambda_n}/J_{\Lambda_n}}\Big\downarrow \text{bijection} & & \text{surjection}\Big\downarrow M_{\Lambda_n} \\
\mathrm{ind}(\mathrm{mod}(kQ_{\Lambda_n}/J_{\Lambda_n})) & \xrightarrow[F_\pi]{} & \mathrm{ind}(\mathrm{mod}\,\Lambda_n)
\end{array}$$

图 2. 交换图

其中 (注意 F_π 和 G_π 只是映射而非函子, 且上述交换图亦可通过**定理 2** 以及 Wald-Waschbusch 在文献[29]

中的相关工作指出):

- 对 $(Q_{\Lambda_n}, J_{\Lambda_n})$ 上的(本原)V-序列 ω，若其同时也是 $(Q_{\Lambda_n}, I_{\Lambda_n})$ 上的(本原)V-序列 ω，则 $G_\pi([\omega])=[\omega]$；若 ω 不是 $(Q_{\Lambda_n}, I_{\Lambda_n})$ 上的 (本原) V-序列 ω，则 $G_\pi([\omega])=[0]$；
- 由 π 是满射知任意 Λ_n-模都可以被自然地看成 $kQ_{\Lambda_n}/J_{\Lambda_n}$-模，因此，存在单射从 $\mathrm{ind}(\mathrm{mod}\,\Lambda_n)$ 到 $\mathrm{ind}(\mathrm{mod}(kQ_{\Lambda_n}/J_{\Lambda_n}))$ 的单射 $\widetilde{F}_\pi$，而 F_π 由 $\widetilde{F}_\pi$ 按下述方式给出: 对任意不可分解的 $kQ_{\Lambda_n}/J_{\Lambda_n}$-模 M，若存在不可分解 Λ_n-模 N 使得 $\widetilde{F}_\pi(N)=M$，则 $F_\pi(M)=N$；否则 $F_\pi(M)=0$.

由**推论 1**, 对 $(Q_{\Lambda_n}, J_{\Lambda_n})$ 上的 (本原) V-序列 ω，它看到 $(Q_{\Lambda_n}, I_{\Lambda_n})$ 上的 (本原) 序列时, 有如下情形:

(a) ω 不是 $(Q_{\Lambda_n}, I_{\Lambda_n})$ 上的 (本原) V-序列, 此时, 在 ω 上存在一条 Q_{Λ_n} 上的路径, 该路径属于 I_{Λ_n}；

(b) $[\omega]\in \mathrm{V}(\Lambda_n)\setminus\overline{\mathrm{V}(\Lambda_n)}$，即 ω 是 $(Q_{\Lambda_n}, I_{\Lambda_n})$ 上的 V-序列, 但不是无关系依附的;

(c) $[\omega]\in\overline{\mathrm{V}(\Lambda_n)}$，即 ω 是 $(Q_{\Lambda_n}, I_{\Lambda_n})$ 上的无关系依附 V-序列;

(d) $[\omega]\in \mathrm{pV}(\Lambda_n)$.

下面证明(1). 对任意 $\omega\in\mathrm{V}(\Lambda_n)$，将其视为 $(Q_{\Lambda_n}, J_{\Lambda_n})$ 上的 V-序列 ω，有

$$M_{\Lambda_n}([\omega]) = M_{\Lambda_n}(G_\pi([\omega])) = F_\pi(M_{kQ_{\Lambda_n}/J_{\Lambda_n}}([\omega]));\qquad (*)$$

对任意 $\omega\in\mathrm{pV}(\Lambda_n)$，将其视为 $(Q_{\Lambda_n}, J_{\Lambda_n})$ 上的本原 V-序列 ω，有

$$M_{\Lambda_n}([\omega],\boldsymbol{J}_n(\lambda\neq 0)) = M_{\Lambda_n}(G_\pi([\omega]),\boldsymbol{J}_n(\lambda)) = F_\pi(M_{kQ_{\Lambda_n}/J_{\Lambda_n}}([\omega]),\boldsymbol{J}_n(\lambda)).$$

考虑 $\omega\in\mathrm{V}(\Lambda_n)\setminus\overline{\mathrm{V}(\Lambda_n)}\,(\subsetneq\mathrm{V}(\Lambda_n))$ 属于分类(b)的情形, 此时, 在 ω 上存在长度 2 的路 $\alpha\beta$ 是某个 I_{Λ_n} 的生成元去系数分量 (记该生成元为 $\alpha\beta-\alpha'\beta'$), 对应地, 将它视为 $(Q_{\Lambda_n}, J_{\Lambda_n})$ 上的 V-序列时, $M_{kQ_{\Lambda_n}/J_{\Lambda_n}}([\omega])$ 在 $\widetilde{F}_\pi$ 的意义下没有非零原像. 这是因为, 如果存在 $0\neq N\in\mathrm{ind}(\mathrm{mod}\,\Lambda_n)$ 使得 $\widetilde{F}_\pi(N)=M_{kQ_{\Lambda_n}/J_{\Lambda_n}}([\omega])$，则对 N 的箭图表示 $N=(Ne_i,\varphi_x)_{i\in(Q_{\Lambda_n})_0, x\in(Q_{\Lambda_n})_1}\neq 0$，$Ne_{s(\alpha)}=Ne_{s(\alpha')}$，$Ne_{t(\alpha)}=Ne_{s(\beta)}$，$Ne_{t(\alpha')}=Ne_{s(\beta')}$，$Ne_{t(\beta)}=Ne_{t(\beta')}$ 均非零. 由此推知 N 对应的 V-序列必有形如 $\alpha\beta(\alpha'\beta')^{-1}$ 的子序列. 再由**定理 2**, N 对应的 V-序列只能是无关系依附的, 这与 $\alpha\beta-\alpha'\beta'\in I_{\Lambda_n}$ 矛盾. 因此必有 $F_\pi(M_{kQ_{\Lambda_n}/J_{\Lambda_n}}([\omega]))=0$. 再由(*), 就得 $M_{\Lambda_n}([\omega])=0$. 同理考虑 ω 属于分类(c)和(d)的情形, 可证明(2)和(3).

下面证明(4). 由(1)和(2)可知若存在 $[\omega],[\omega']\in\mathrm{V}(\Lambda_n)$ 使得 $M_{\Lambda_n}([\omega])=M_{\Lambda_n}([\omega'])$，则

$$M_{kQ_{\Lambda_n}/J_{\Lambda_n}}([\omega]) = \widetilde{F}_\pi(M_{\Lambda_n}([\omega])) = \widetilde{F}_\pi(M_{\Lambda_n}([\omega'])) = M_{kQ_{\Lambda_n}/J_{\Lambda_n}}([\omega']).$$

由 $M_{kQ_{\Lambda_n}/J_{\Lambda_n}}$ 是双射, 可知在 $(Q_{\Lambda_n}, J_{\Lambda_n})$ 上有 $[\omega]=[\omega']$，于是 $[G_\pi(\omega)]=[G_\pi(\omega')]$，即在 $(Q_{\Lambda_n}, I_{\Lambda_n})$ 上有 $[\omega]=[\omega']$. 所以, $M_{\Lambda_n}|_{\overline{\mathrm{V}(\Lambda_n)}}$ 是单射. □

3　主要结论

本节对 $\Lambda_n = A_n\otimes_k\widetilde{A}_n$ 上的不可分解模进行完全分类. 首先, 由**引理 2** (3), 可知 Λ_n 上的不可分解模可以分为两个部分: 对应于交错 V-序列的不可分解模和不可分解的投射-内射模. 更精确地说, 有下述定理:

定理 3. *存在双射*

$$\overline{\mathrm{V}(\Lambda_n)}\cup\mathrm{pV}(\Lambda_n)\longrightarrow\mathrm{ind}(\mathrm{mod}\,\Lambda_n)$$

将 $\omega\in\overline{\mathrm{V}(\Lambda_n)}$ 映射为 $M_{\Lambda_n}([\omega])$，将 $\beta\in\mathrm{pV}(\Lambda_n)$ 映射为 $M_{\Lambda_n}([\beta],\boldsymbol{J}_1(1))$.

证. 由**引理 2** 的(4)可知 $M_{\Lambda_n}|_{\overline{\mathrm{V}(\Lambda_n)}}$ 是单射, 所以 $\overline{\mathrm{V}(\Lambda_n)}$ 与 $\mathrm{im}(M_{\Lambda_n}|_{\overline{\mathrm{V}(\Lambda_n)}})$ 在映射 M_{Λ_n} 的意义下一一对应.

再者, 对每个 $\beta\in\mathrm{pV}(\Lambda_n)$，由**引理 2** 的(3)可知 $M_{\Lambda_n}(\beta,\boldsymbol{J}_n(\lambda))\neq 0$ 当且仅当 $n=1$ 且 $\lambda=1$，且更精确地说, 在 $kQ_{\Lambda_n}/J_{\Lambda_n}$ 中, $M_{kQ_{\Lambda_n}/J_{\Lambda_n}}([\beta],\boldsymbol{J}_n(\lambda))=M_{kQ_{\Lambda_n}/J_{\Lambda_n}}([\beta'],\boldsymbol{J}_m(\mu))$ 当且仅当 $[\beta]=[\beta']$，$n=m$ 且 $\lambda=\mu$ (这是因为 $M_{kQ_{\Lambda_n}/J_{\Lambda_n}}$ 是双射, 见**引理 2** 的证明). 所以, 由图 **2** 所给的交换图, 可知

$$M_{kQ_{\Lambda_n}/J_{\Lambda_n}}([\beta],\boldsymbol{J}_1(1)) = \widetilde{F}_\pi(M_{\Lambda_n}([\beta],\boldsymbol{J}_1(1))) = \widetilde{F}_\pi(M_{\Lambda_n}([\beta'],\boldsymbol{J}_1(1))) = M_{kQ_{\Lambda_n}/J_{\Lambda_n}}([\beta'],\boldsymbol{J}_1(1)),$$
$$\Rightarrow([\beta],\boldsymbol{J}_1(1)) = ([\beta'],\boldsymbol{J}_1(1))$$

于是 $[\beta]=[\beta']$，这意味着 $M_{\Lambda_n}|_{\{(\beta,J_1(1))|\beta\in\mathrm{pV}(\Lambda_n)\}}$ 是单射. 于是 M_{Λ_n} 按下述图示诱导了从 $\mathrm{pV}(\Lambda_n)$ 到 $\mathrm{PI}(\Lambda_n)$

:= {不可分解投射-内射 Λ_n-模}的双射.

$$\mathrm{pV}(\Lambda_n)\xrightarrow[1-1]{\beta\mapsto(\beta,\boldsymbol{J}_1(1))}\mathrm{pV}(\Lambda_n)\times\{\boldsymbol{J}_1(1)\}=\{(\beta,\boldsymbol{J}_1(1))\mid\beta\in\mathrm{pV}(\Lambda_n)\}\xrightarrow[1-1]{M_{\Lambda_n}}\mathrm{PI}(\Lambda_n).$$

最后，由于对其它 V-序列 $\omega\in\mathrm{V}(\Lambda_n)\setminus\overline{\mathrm{V}(\Lambda_n)}$，由**引理 2** 的(1)可知 $M_{\Lambda_n}([\omega])=0$. 所以，

$$\mathrm{ind}(\mathrm{mod}\,\Lambda_n)=\mathrm{im}(M_{\Lambda_n}|_{\overline{\mathrm{V}(\Lambda_n)}})\bigcup\mathrm{PI}(\Lambda_n).$$

由**定理 2** (即 $\mathrm{im}(M_{\Lambda_n}|_{\mathrm{V}(\Lambda_n)})\bigcap\mathrm{im}(M_{\Lambda_n}|_{\mathrm{pV}(\Lambda_n)\times\mathcal{J}})=\varnothing$) 可知上式右侧的并集是不交并，这就得到了双射

$$\overline{\mathrm{V}(\Lambda_n)}\cup\mathrm{pV}(\Lambda_n)\xrightarrow{1-1}\overline{\mathrm{V}(\Lambda_n)}\cup(\mathrm{pV}(\Lambda_n)\times\{\boldsymbol{J}_1(1)\})\xrightarrow{1-1}\mathrm{im}(M_{\Lambda_n}|_{\overline{\mathrm{V}(\Lambda_n)}})\bigcup\mathrm{PI}(\Lambda_n)=\mathrm{ind}(\mathrm{mod}\,\Lambda_n).\ \square$$

推论 2. $\Lambda_n=A_n\otimes_k\widetilde{A}_n$ 上的不可分解模要么是不可分解的投射-内射模，要么是交错 V-sequence 对应的模. 进一步地，在同构意义下，不可分解 Λ_n-模的个数为 $2n^3+n^2-n$.

证. 定理 3 给出了不可分解 Λ_n-模在同构意义下的完全分类. 因此，要计算不可分解 Λ_n-模的同构类数，只需计算 $\overline{\mathrm{V}(\Lambda_n)}\bigcup\mathrm{pV}(\Lambda_n)$ 的元素个数. 首先，$\overline{\mathrm{V}(\Lambda_n)}=(\overline{\mathrm{V}(\Lambda_n)},\preceq)$ 是偏序集，其中，对任意两个交错 V-序列 $\omega,\omega'\in\overline{\mathrm{V}(\Lambda_n)}$，偏序 $\omega\preceq\omega'$ 由 $\omega\subseteq\omega'$ 定义. 易见 $\overline{\mathrm{V}(\Lambda_n)}$ 的极大元素存在，其总是形如

$$(e_{A,n}\otimes b_j)\,(a_{n-1}\otimes e_{B,\overline{j+1}})^{-1}\,(e_{A,n-1}\otimes b_{\overline{j+1}})\,(a_{n-2}\otimes e_{B,\overline{j+2}})^{-1}\cdots(e_{A,2}\otimes b_{\overline{j+n}})\,(a_1\otimes e_{B,\overline{j+(n-1)}})^{-1}\,(e_{A,1}\otimes b_{\overline{j+n+1}}),$$

其中，对整数 x，记号 $\overline{x}$ 表示 x 对 n 取余数后再加 1；它们的长度均为 $2n-1$，共 n 个.

因为任意交错 V-序列一定是且唯一地是的某个极大交错 V-序列的子序列，所以长度 ≥ 1 的交错 V-序列由极大交错 V-序列的子序列完全决定，其总数为 $n\mathrm{C}_{2n}^2$. 又，长度 0 的交错 V-序列总数为箭图的顶点数 n^2；不可分解投射-内射模的同构类数为 $n(n-1)$，于是，不可分解模的同构类数为 $n\mathrm{C}_{2n}^2+n^2+n(n-1)=2n^3+n^2-n$. □

参考文献

[1] ROTMAN J J. *An Introduction to Homological Algebra (Second Edition)* [M]. New York: Springer, 2009. ISBN: 978-0-387-24527-0.

[2] MAHDOU N, TAMEKKANTE M. On Gorenstein global dimension of tensor product of algebras over a field [J]. *Gulf Journal of Mathematics*, **3**: 30–37, 2015. DOI: 10.56947/gjom.v3i2.159.

[3] HU W, LUO X-H, XIONG B-L, ZHOU G D. Gorenstein projective bimodules via monomorphism categories and filtration categories [J]. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **233**(3): 1014–1039, 2019. DOI: 10.1016/j.jpaa. 2018.05.012.

[4] HOCHSCHILD G. On the cohomology groups of an associative algebra [J]. *Annals of Mathematics*, 46: 58–67, 1945. DOI:10.2307/1969145.

[5] BUCHWEITZ R-O, GREEN E L, MADSEN D, SOLBERG O. Finite Hochschild cohomology without finite global dimension [J]. *Mathematical research letters*, **12**:805－816, 2005. DOI: 10.4310/MRL.2005.v12.n6.a2.

[6] HAPPEL D. Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras. In: *Séminaire d'Algébre Paul Dubreil et Marie-Paul Malliavin*, 1989. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1404. Berlin-Heidelberg: Springer, 2006, 108–126, DOI:10.1007/BFb0084073.

[7] HERSCHEND M. Tensor products on quiver representations [J]. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **1**(212): 452－469, 2008. DOI: 10.1016/j.jpaa.2007.06.004.

[8] HERSCHEND M. Solution of the Clebsch-Gordan problem for Kronecker representations. U.U.D.M Project Report 2003:P1, Uppsala University, 2003.

[9] MARTSINKOVSKY A, VLASSOV A. The representation ring of $k[x]$ [EB/OL] (2023-12-1). Preprint, 2004. DOI: f42add2c9ca3020a0cf7f9057a211a7b6c393005.

[10] HERSCHEND M. Solution to the Clebsch-Gordan problem for representations of quivers of type $\widetilde{\mathbb{A}}_n$ [J]. *Journal of Algebra and Its Applications*, **4**(5):481－488, 2005. DOI: 10.1142/S0219498805001332.

[11] HERSCHEND M. Galois coverings and the Clebsch-Gordon problem for quiver representations [J]. *Colloquium Mathematicum*, **109**(2):193－215, 2007. DOI: 10_4064-cm109-2-3.

[12] HERSCHEND M. Solution to the Clebsch–Gordan problem for string algebras [J]. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **214**(11):1996－2008. DOI:10.1016/j.jpaa.2010.02.003.

[13] BAO Yanhong. The quiver method on the representation theory of tensor product algebras and hereditary algebras (in Chinese) [D]. PhD Thesis. Hefei: Anhui University, 2010.
(鲍炎红. 张量积代数与遗传代数表示理论中的箭图方法[D]. 合肥：安徽大学, 2010.)

[14] LIU Yu-Zhe, ZHANG Yafeng. Sufficient and necessary conditions for the multiple tensors of algebras of

type A to berepresentation-finite (in Chinese) [J/OL] (2023-12-1). *Science Sinica Mathematics*, Publish Oline, 2023. DOI: 10.1360/SSM-2023-0080.
(刘雨喆, 张亚峰: A 型代数的多重张量代数表示有限的充分必要条件) [J] (2023-12-1). 中国科学: 数学, 网络见刊, 2023.)

[15] ROITER A V. Unboundedness of the dimension of the indecomposable representations of an algebra which has infinitely many indecomposable representations [J]. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, **32**(6):1275－1282, 1968. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, **2**(6):1223, 1968. DOI: 10.1070/IM1968v002n06ABEH000727.

[16] AUSLANDER M. Representation theory of Artin algebras II [J]. *Communications in algebra*, **1**(4):269－310, 1974. DOI:10.1080/00927877409412807.

[17] SIMSON D . Functor categories in which every at object is projective [J]. *Bullet De L'academiePolonaise des Sciences Serie des Sciences Mathematics, Astronomy, et Physics*, **22**:375－380, 1974.

[18] RINGEL C M, TACHIKAWA H. QF-3 rings. *Journal fur die reine und ange-wandte Mathematik* [J], **272**, 1975. DOI:10.1515/crll.1975.272.49 (Online in 2009/12/09).

[19] AUSLANDER M. Large modules over Artin algebras [A]. In: *Algebra, Topology, and Category Theory*, pages 1－17. Amsterdam: Elsevier, 1976. DOI:10.1016/B978-0-12-339050-9.50006-7.

[20] YAMAGATA K. On Artinian rings of finite representation type [J]. *Journal of Algebra*, **50**(2):276－283, 1978. DOI: 10.1016/0021-8693(78)90155-2.

[21] SIMSON D. On large indecomposable modules and right pure semi-simple rings [J]. *Algebra and Discrete Mathematics*, **2**(2):93－117, 2003. https://admjournal.luguniv.edu.ua/index.php/adm/article/vie-w/960/489.

[22] RINGEL C M. Report on the Brauer-Thrall conjectures: Rojter's theorem and the theorem of Nazarova and Rojter (on algorithms for solving vectorspace problems. I) [A]. In: *Rep-resentation Theory I. Proceedings of the Workshop on the Present Trends in Representation Theory*, volume 831, Ottawa: Carleton University, pages 104－136, 2006. DOI:10.1007/BFb0089780.

[23] NAZAROVA L A, ROITER A V. Kategorielle Matrizen-Probleme und die Brauer-Thrall-Vermutung [J]. *Mitteilungen aus dem Mathem*, (115):1－153, 1975.

[24] SMAL Ø O S. The inductive step of the second Brauer-Thrall conjecture [J]. *Canadian Journal of Mathematics*, **32**(2):342－349, 1980. DOI:10.4153/CJM-1980-026-0.

[25] BAUTISTA R. On algebras of strongly unbounded representation type [J]. *Commentarii Mathematici Helvetici*, **60**(1):392－399, 1985. DOI:10.1007/BF02567422.

[26] BAUTISTA R, GABRIEL P, ROITER A V, SALMERON L. Representation-finite algebras and multiplicative bases [J]. *Inventiones mathematicae*, **81**:217－285, 1985. DOI:10.1007/BF01389052.

[27] ASSEM I, SIMSON D, SKOWRONSKI A. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Volume 1: Techniques of Representation Theory* [M]. Cambridge : Cambridge University Press, 2006. DOI:10.1017/CBO9780511614309.

[28] ZHOU Jianguo, LIU Yu-Zhe, ZHANG Chao. On monomial algebras with representation-finite enveloping algebras, Preprint, 2023.

[29] WALD B, WASCHBUSCH J. Tame biserial algebras [J]. Journal of Algebra, **1**(95): 480－500, 1985. DOI: 10.1016/0021-8693(85)90119-X.

[30] ASSEM I, SKOWRONSKI A. Iterated tilted algebras of type $\widetilde{\mathbb{A}}_n$ [J]. *Mathematische Zeitschrift*, **195**(2): 269－290, 1987. DOI:10.1007/bf01166463.